A Ch cn CA

Apellido y nombres: ....
Padrón: .... Correo electrónico: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....

Análisis Matemático III.

Examen Integrador. Tercera fecha. 12 de febrero de 2019.

1		2		3		4	
a	b	a	b	a	b	a	b

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de al menos 4(cuatro) ítems, entre los cuales debe figurar uno del ejercicio 1 o del 2 y uno del ejercicio 3 o del 4.

Ejercicio 1.

(a) Probar la convergencia de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x^3}\, dx$ $(0<\alpha<1)$ y calcular su valor, utilizando variable compleja.

(b) Plantear y resolver el problema que modeliza el potencial eléctrico u en el recinto $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<2\}$ con condiciones de contorno $u(x,y)=0$ para $x^2+y^2=1$ y $u(x,y)=\operatorname{sen}(\varphi/2)$ para $x^2+y^2=2$, siendo $\varphi=\operatorname{Arg}(x+iy)$.

Ejercicio 2.

(a) Hallar coeficientes c_n tales que $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ converja en media cuadrática a

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2} & \text{si} \quad -\pi\leqslant x<0 \\ \frac{\pi}{2}-\frac{x}{2} & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant\pi \end{cases}.$$

(b) Analizar convergencia puntual y uniforme de la serie del ítem (a).

Ejercicio 3.

(a) Probar que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función par y $\hat{f}(w)$ es su transformada de Fourier, entonces $\hat{f}(w)$ es real para todo w real y es una función par.

(b) Resolver la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t)=u_{tt}(x,t) & -\infty<x<+\infty, \quad t>0 \\ u_t(x,0)=0 & -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=\dfrac{1}{1+x^2} & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

(dar explícitamente la solución en término de sus variables reales).

Ejercicio 4.

(a) Hallar $f(t)$ tal que:

$$f(t)=\int_0^t f(\tau)\,(t-\tau)^3 d\tau+t^2 \quad \forall t>0$$

(b) Mostrar que si $F(s)=\mathcal{L}[f(t)H(t)]$ entonces $\mathcal{L}^{-1}[e^{-sa}F(s)]=H(t-a)f(t-a)$ $\forall a>0$ y calcular la transformada inversa de Laplace de $F(s)=\dfrac{se^{-as}}{s^2+b^2}$ $\quad a,b>0$.